ZUR PEANO-ABBILDUNG EINER STRECKE(1)

BY

A. DINGHAS

ABSTRACT

Let N_1, N_2 be two disjoint non-void subsets of $N = \{1, 2, ...\}$. It is shown that if N_2 is an infinite set, than there exists a Peano-mapping f of $[0, 1]$ onto $\times_1^{\infty}[0, 1]$ such that $f(t_1 + t_2) = f(t_2)$ holds, for arbitrary points t_1, t_2 of the corresponding subsets $C[N_1]$, $C[N_2]$ of the Cantor discontinuum $C[N]$ of $[0, 1]$.

1. **Einleitung.** Es bezeichne $\hat{I}$ das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$, q eine ganze positive Zahl und C_q die durch die Gleichung

$$C_q = \left\{ t : t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2c_k}{(2q+1)^k}, \; c_k \in \{0, 1, \cdots, q\} \right\} \tag{1.1}$$

definierte Cantorsche $(2q + 1)$-Menge(2). Bedeuted dann $M[n_k]$ (kurz M) eine nicht leere Teilmenge von $N = \{1, 2, \cdots\}$ mit $n_1 < n_2 < \cdots$, so soll unter $C_q[M]$ die durch die Gleichung

$$C_q[M] = \left\{ t : t = \sum_{k} \frac{2d_k}{(2q+1)^{n_k}}, \; d_k \in \{0, 1, \cdots, q\} \right\} \tag{1.2}$$

definierte Menge verstanden werden. Für die nachfolgenden Entwicklungen ist es zweckmässig auch die leere Menge in die Definition von $C_q[M]$ einzubeziehen und $C_q[\varnothing]$ durch die Menge $\{0\}$ (also den Punkt $t = 0$) zu definieren.

Es werden folgende Sätze bewiesen:

SATZ 1. *Es seien N_1, N_2 zwei disjunkte Teilmengen von N. Ist dann N_2*

(1) Vorgetragen in leicht abgeänderter Form vor der Finnischen Mathematischen Gesellschaft am 3. März 1969.

(2) Die bekannteste $(2q + 1)$-Menge ist die Dreiermenge von Cantor. Man vgl. etwa Cantor [1], S. 207 f.

Received April 27, 1969

unendlich, so gibt es eine stetgige (Peano)-Abbildung $f = [f(t)](t \in \hat{I})$ *mit* $f = [f_r](r \in N)$ *und* $f_r = [f_r(t)](t \in \hat{I})$ *mit den Eigenschaften*:

(i) *Es ist*

$$f(t_1 + t_2) = f(t_2) \quad (t_1 \in C_q[N_1],\ t_2 \in C_q[N_2]). \tag{1.3}$$

(ii) *Bei festem* $t_1 \in C_q[N_1]$ *bildet* f *die Menge*

$$C_q[N_2] = \left\{ t_2 : t_2 = \sum_k \frac{2d_{2k}}{(2q+1)^{n_{2k}}},\ d_{2k} \in \{0, 1, \cdots, q\} \right\} \tag{1.4}$$

(stetig) auf $\hat{I}^\infty = \mathop{\times}\limits_{1}^{\infty} I$ *ab.*

Satz 2. *Ist* $N_1 \subset N$ *vorgegeben and* $N - N_1$ *unendlich, so kann* N_2 *derart gewählt werden, dass der Durchmesser von* $C_q[N_2]$ *(positiv und) kleiner als eine willkürlich gewählte positive Zahl* $\varepsilon(\varepsilon < 1)$ *ausfällt.*

Demnach existieren Peano-Abbildungen f von $\hat{I}$, die (unter der gemachten Einschränkung über N_1) gleichzeitig eine rechte Umgebung $[t_1, t_1 + \varepsilon[$ jedes Punktes t_1 von

$$C_q[N_1] = \left\{ t_1 : t_1 = \sum_k \frac{2d_{1k}}{(2q+1)^{n_{1k}}},\ d_{1k} \in \{0, 1, \cdots, q\} \right\} \tag{1.5}$$

auf den Hilbert-Würfel $\hat{I}^\infty$ abbilden. Dass die Sätze 1 and 2 auch für jede Peano-Abbildung f von $\hat{I}$ auf $\hat{I}^m$ mit einem festen $m \in N$ gelten, ist trivial und bedarf hier keiner weiteren Erläuterung.

2. Zerlegungen von N. Definition der Funktionen g_q. Bei festem $r \in N$ soll $N^r = \{n_k^r\}(k \in N)$ eine nichtleere Teilmenge (Folge) von N mit den Eigenschaften bedeuten:

(i) N^r ist unendlich.

(ii) Es gilt $n_k^r < n_{k+1}^r$ $(\forall k \in N)$.

Definition. *Ein System* $\mathfrak{Z} = \{N^r\}$ *von zueinander disjunkten Teilmengen* N^r *von* N *soll eine Zerlegung von* N *heissen. Die Zerlegung heisst endlich oder unendlich je nachdem* $\mathfrak{Z}$ *endlich bzw. unendlich viele Elemente hat. Entsprechend heisst* $\mathfrak{Z}$ *vollständing bzw. unvollständing, je nachdem* $N = \bigcup_r N^r$ *bzw.* $N \supset \bigcup_r N^r$ *gilt.*

Beispiele unendlicher vollständiger Zerlegungen $\mathfrak{Z}$:

1. $$n_k^r = \binom{r+k-1}{2} + k \qquad (r, k \in N)$$

2. $\qquad n_k^r = 2^{r-1}(2k-1)$ (³).

Nimmt man (bei festem $m \in N$)

$$n_k^r = m(k-1)+r \qquad (r = 1, \cdots, m;\ k \in N)$$

so hat man eine Zerlegung von N in m Teilmengen $N^1, \cdots, N^m$. Diese Zerlegung ist offenbar vollständing(⁴).

Der Begriff der Zerlegung von N kann durch die Abbildung $k \leftrightarrow n_k$ auf jede unendliche Teilmenge $N_2 = \{n_k\}$ $(k \in N)$ übertragen werden. Danach gibt es zu jeder unendlichen Teilmenge $N_2 = \{n_k\}$ von N endliche bzw. unendliche Zerlegungen $\mathfrak{Z} = \{N^r\}$ mit $\bigcup_r N^r \subset N_2$. Von dieser Bemerkung wird später Gebrauch gemacht.

Es sei jetzt q ganz, $\geqq 1$. Wir definieren $g_q = [g_q(t)]\,(t \in \hat{\mathrm{I}})$ nach der Vorschrift:

$$g_q(t) = \begin{cases} \mu & (t \in \hat{\mathrm{I}}_{2\mu}) \\ (2q+1)t - \mu & (t \in \hat{\mathrm{I}}_{2\mu-1}) \end{cases} \tag{2.1}$$

mit

$$\hat{\mathrm{I}} = \left[\frac{\lambda}{2q+1}, \frac{\lambda+1}{2q+1}\right] \quad (\lambda = 0, 1, \cdots, 2q), \tag{2.2}$$

und setzen für $t \in (1,2)$

$$g_q(t) = g_q(2-t). \tag{2.3}$$

Ist g_q in $[0,2)$ mit Hilfe von (2.1) und (2.3) definiert, so liefert die Definitionsgleichung

$$g_q(t) = g_q(t') \quad (t \in \boldsymbol{R}, t' \in [0,2],\ t' \equiv t \pmod 2) \tag{2.4}$$

die periodische Fortsetzung von g_q und somit deren Definition auf $\boldsymbol{R}$.

Die Funktion g_q ist (für $q=1$) erstmalig von Peano(⁵) definiert worden. Eine

---

(³) Die Zerlegung 1 wird durch das Abzählen von N und das Hineinschreiben der Ziffern 1, 2, ... nach der Vorschrift des Schemas

$$\begin{array}{llllll} N^1: 1 & 3 & 6 & 10 & & .. \\ N^2: 2\nearrow & 5\nearrow & 9\nearrow & .. & .. & \\ N^3: 4\nearrow & 8\nearrow & .. & .. & .. & \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{array}$$

erhalten. Die Zerlegung 2 geht auf K. Iséki (Sierpiński [2], S. 110 ff.) zurück.

(⁴) Die Mengen $N^1, \ldots, N^m$ fallen hier mit den Restklassen von N mod m zusammen.

(⁵) Peano [3]. Eine ausführlichere Übersicht findet der Leser in Sierpiński [2] S. 110 f. Die dort benutzte Darstellung legt die Isékische Zerlegung zugrunde.

Vereinfachung ihrer Definition verdankt man bekanntlich Lebesgue([6]) und Schoenberg ([7]).

3. **Die Peano-Funktionen** f_r. Folgende Eigenschaft der Funktionen g_q ist von grundlegender Bedeutung:

HILFSSATZ 1. *Sei $t_0 \in C_q$. Dann gilt für jedes $n \in N$ die Gleichung*

$$g_q([2q+1]^{n-1}t_0) = c_n. \tag{3.1}$$

Beweis. Man schreibe $[2q+1]^{n-1}t_0$ in der Form

$$\frac{2c_n}{2q+1} + 2\sum_{k=1}^{n-1}(2q+1)^{n-k-1}c_k + \frac{2}{2q+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{n+k}}{(2q+1)^k} = \frac{2c_n}{2q+1} + S_1 + S_2.$$

Dann ist S_1 eine gerade nicht negative Zahl und somit zunächst

$$g_q([2q+1]^{n-1}t_0) = g_q\left(\frac{2c_n}{2q+1} + S_2\right).$$

Nun ist wegen $c_k \leqq q$

$$0 \leqq S_2 \leqq \frac{\theta}{2q+1} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 1),$$

also liegt $\dfrac{2c_n}{2q+1} + S_2$ in I_{2c_n}. Das liefert die Gleichung

$$g_q\left(\frac{2c_n}{2q+1} + S_2\right) = c_n.$$

DEFINITION. *Bei gegebenem $N^r = \{n_k^r\}$ und festem $r \in N$ wird die Funktion $f_r = [f_r(t)]$ $(t \in \hat{I})$ mit*

$$f_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_q([2q+1]^{n_k^r-1}t)}{(q+1)^k} \tag{3.2}$$

eine Peano-Funktion genannt.

Offenbar ist jede Peano-Funtion f_r wegen $0 \leqq g_q([2q+1]^{n_k^r-1}t) \leqq q$ eine

(6) Lebesgue [4], S. 44 f.

(7) Schoenberg [5], S. 519.

stetige Funktion auf $\boldsymbol{R}$ und hat die Periode 2[8]. Ferner gilt $0 \leqq f_r(t) \leqq 1$ in jedem Punkt von $\hat{\mathrm{I}}$ bzw. von $\boldsymbol{R}$. Ist die Menge N_2 von 1 unendlich und $\mathfrak{Z} = \{N^r\}$ eine unendliche Zerlegung von N_2, so liefert die Funktion $f = [f_r]$ mit $f_r = [f_r(t)]$ eine Peano-Abbildung von $\hat{\mathrm{I}}$ auf $\hat{\mathrm{I}}_\infty$.

4. **Beweis der Sätze 1 und 2.** Schreibt man $N_2 = \{n_{2k}\}$ in der Form $\bigcup_r N^r = \bigcup_r \{n_k^r\}$ und definiert man $f = [f_r]$ durch die Gleichungen

$$f_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_q([2q+1]^{n_k^r - 1} t)}{(q+1)^k} \quad (r \in N), \tag{4.1}$$

so erhält man wegen $C_q[N_1] \cap C_q[N_2] = \{0\}$, die Gleichungen

$$f_r(t_1 + t_2) = f_r(t_2) \qquad (\forall r \in N). \tag{4.2}$$

Die Gleichungen (4.2) sind Folge der Gleichungen

$$g_q([2q+1]^{n_k^r - 1}(t_1 + t_2)) = c_{n_k^r}$$

und

$$g_q([2q+1]^{n_k^r - 1} t_2) = c_{n_k^r}$$

wobei $2c_{n_k^r}$ der Koeffizient von $(2q+1)^{-n_k^r}$ in der Darstellung von $t_1 + t_2$ bzw. von t_2 ist. Das beweist zunächst den Satz 1.

Den Satz 2 kann man dadurch beweisen, dass man zu einer unvollständigen (unendlichen) Zerlegung $\bigcup_r N_r$ übergeht und diese Menge bei gegebenem $\varepsilon\,(0 < \varepsilon < 1)$ einschränkt, indem man sämtliche n_k^r der Zerlegung $\{N^r\}$ so gross nimmt, dass die (ganze) Zahl

$$n_0 = \min\{n_1^r : r \in N\}$$

durch die Bedingung

$$n_0 > 1 + \frac{\log 1/\varepsilon}{\log(2q+1)}$$

nach unten abgegrenzt wird. Ist dies getan, so liefert eine einfache Überlegung das Ergebnis, dass der Durchmesser von $C_q[\bigcup_r N^r]$ kleiner als ε ausfällt. Somit

---

[8] Das ist eine Folge der Tatsache, dass bei gegebenem $m \in N$

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{g_q([2q+1]^{n_k^r - 1} t)}{(q+1)^k} \leqq \frac{1}{(q+1)^m}$$

gilt.

gibt es Peano-Abbildungen von $\hat{I}$ auf $\hat{I}_\infty$, die gleichzeitig jedes Intervall $[t_1, t_1 + \varepsilon]$ für sämtliche $t_1 \in C_q[N_1]$ auf $\hat{I}^\infty$ abbilden. Der Fall eines endlich-dimensionalen Einheitswürfels $\hat{I}^m$ verläuft analog.

Literatur

1. G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin, Verlag von Julius Springer, 1932.

2. W. Sierpiński, *Cardinal and ordinal Numbers* (Monografie Matematyczne Tom 34) Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1958.

3. G. Peano, *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*. Math. Ann. **36** (1890), 157–160.

4. H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, Paris, 1950.

5. I. J. Schoenberg, *On the Peano curve of Lebesgue*, Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 519.

Freie Universität
Berlin
Hüttenweg 9
I. Math. Institut
(Germany)